ENSEMBLES

*Les cours et réponses aux exercices sont téléchargeables sur le site **MathEnSeconde.fr***

I- GÉNÉRALITÉS

1

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 4cm.
Soit $\mathcal{D}$ le disque de centre O et de rayon 4cm.
Soient A, B et C trois points du plan tels que $OA = AB =$ 2cm.
Vrai ou faux (ou on ne peut pas savoir) ?

a) $O \in \mathcal{C}$

b) $O \in \mathcal{D}$

c) $A \in \mathcal{C}$

d) $A \in \mathcal{D}$

e) $B \in \mathcal{C}$

f) $B \in \mathcal{D}$

g) $\mathcal{C} \in \mathcal{D}$

2

Lorsque c'est possible, écrire en extension :

a) L'ensemble des diviseurs de 12.

b) L'ensemble des multiples de 12

c) L'ensemble des diviseurs de 4 et de 6

3

Lorsque c'est possible, écrire en extension :

a) L'ensemble des entiers qui sont (chacun) à la fois multiple de 3 et diviseur de 30

b) L'ensemble des entiers qui sont chacun, à la fois multiple de 5 et multiple de 3.

c) L'ensemble des entiers inférieurs strictement à 100 qu'on peut exprimer comme produits (ou « poly-produits ») dont les facteurs ne sont autres que 1, 2 et 5 éventuellement répétés. Par exemple $2\times5\times5$ ou $2\times2\times2$ ou 1×2.

4

Écrire en compréhension, de façon simple si possible :

a) $\{1;2;4;8;16;32;64;128;256;512\}$

b) $\{0;1;4;9;16;25;36;49;64;81;100;121;144;169;196\}$

c) $\{2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43;47\}$

d) $\{1;2;3;5;6;10;15;30\}$

5

Vrai ou faux ?

a) $2 \in \{1;2;3\}$

b) $0 \in \{1;2;3\}$

c) $\{1;2\} \in \{1;2;3\}$

d) $1 \in \{1\}$

e) $1 \in 1$

f) $\{1\} \in \{1\}$

g) $0 \in \{1\}$

h) $\{1\} \in \{1;2\}$

i) $\{1\} \in \{\{1\};\{2\}\}$

j) $1 \in \{\{1\};\{2\}\}$

k) $\{1;2;3\} = \{3;2;1\}$

l) $1 \in \{\{1;2\};3\}$

m) $3 \in \{\{1;2\};3\}$

6

a) $\text{Card}\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right\} =$

b) $\text{Card}(\{3\}) =$

c) Soit A l'ensemble des diviseurs de 100. Que vaut $\text{Card}(A)$?

d) $\text{Card}\{2+3\} =$

e) $\text{Card}\{\{1;2\};\{3;4\}\} =$

7 (Exercice à réviser en priorité.)

$E=\{a;b;c\}$

(a, b et c étant trois éléments distincts deux à deux, dont la nature ne nous importe pas.)

a) Écrire tous les *couples* qu'on peut former avec les éléments de E.

b) Écrire toutes les *paires* qu'on peut former avec les éléments de E.

8

$E=\{a;b;c;d\}$

a) Écrire tous les *couples* qu'on peut former avec les éléments de E.

b) Écrire toutes les *paires* qu'on peut former avec les éléments de E.

c) Sans essayer de tout écrire, pouvez-vous trouver a) si E avait contenu 5 éléments ?

d) De même, combien aurait-on trouvé de couples à la question b) si E avait contenu 5 éléments ?

9

a) Combien peut-on former de couples à partir de 10 éléments ?

b) Combien peut-on former de paires à partir de 10 éléments ?

n étant un entier naturel, exprimer en fonction de n :

c) Le nombre de couples qu'on peut former avec n éléments.

d) Le nombre de paires qu'on peut former avec n éléments.

10

a) $E=\{a;b\}$. Écrire tous les triplets qu'on peut former à partir des éléments de E.

b) $F=\{a;b;c;d\}$. Écrire toutes les « triades » (ensembles à trois éléments) qu'on peut former à partir des éléments de F.

11

Soit A un ensemble dont le cardinal est 10. Avec les éléments de A :

a) Combien peut-on former de triplets ?*

b) Combien peut-on former de quintuplets ?

c) Combien peut-on former de quintuplets sans répétition ? (C'est-à-dire dans lesquels les termes sont tous distincts deux à deux).

II- La relation d'inclusion

12

On pose : $A=\{a;b;c\}$, $B=\{b;c\}$, $C=\{b;c;d\}$.

Vrai ou faux ?

a) $A\subset B$

b) $A\subset A$

c) $B\subset A$

d) $A\subset C$

e) $B\subset C$

f) $\varnothing\subset A$

g) $B\subset\varnothing$

h) $\varnothing\subset\varnothing$

13

Vrai ou faux ?

a) $1\in\{1;2;3\}$

b) $1\subset\{1;2;3\}$

c) $\{1\}\in\{1;2;3\}$

d) $\{1\}\subset\{1;2;3\}$

e) $1,3\in\{1;2\}$

14

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 4cm.
Soit $\mathcal{D}$ le disque de centre O et de rayon 4cm.
Vrai ou faux ?

a) $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$

b) $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$

c) $O \subset \mathcal{D}$

d) $\{O\} \subset \mathcal{D}$

e) $\{O\} \subset \mathcal{C}$

15

Existe-t-il deux ensembles A et B tels que l'on ait à la fois $A \subset B$ et $A \in B$?

16

On pose : $A = \{a;b;c\}$, $B = \{b;c\}$.

a) Écrire en extension un ensemble qui est *inclus* dans A mais pas dans B.

b) Écrire en extension un ensemble de cardinal 2 qui est *inclus* dans A mais pas dans B.

c) Existe-t-il un ensemble de cardinal 3 qui soit *inclus* dans A mais pas dans B ?

d) Existe-t-il un ensemble de qui soit *inclus* dans B mais pas dans A ?

17

a) On pose : $E = \{a;b\}$. Écrire la liste de tous les *sous-ensembles* de E.

b) On pose : $E = \{a;b;c\}$. Écrire la liste de tous les *sous-ensembles* de E.

18

On pose : $E = \{a;b;c;d\}$. Écrire la liste de tous les *sous-ensembles* de E.

19

a) $E = \{ a ; b ; c ; d ; e \}$. Sans essayer de tout écrire, pouvez-vous dire combien E a de sous-ensembles ?

b) E est un ensemble de cardinal 10. Combien y a-t-il de sous-ensembles de E ?

c) E est un ensemble de cardinal n. Combien y a-t-il de sous-ensembles de E ?

III- Opérations sur les ensembles

20

$E = \{a;b;c\}$ $F = \{c;d\}$ $G = \{b\}$

Exprimer en extension :

a) $E \cup F$

b) $E \cup G$

c) $E \cap F$

d) $F \cap G$

e) $E \setminus G$

f) $E \setminus E$

g) $\mathscr{P}(E)$

21

$E = \{a;b\}$ $F = \{a\}$ $G = \{b;c\}$

Exprimer en extension :

a) $E \cup F$

b) $E \cup G$

c) $E \cap G$

d) $F \cap G$

e) $E \setminus F$

f) $F \setminus F$

g) $\mathscr{P}(E)$

22

$A = \{u;v\}$ $B = \{a;b;c\}$

Écrire en extension : a) $A \times B$ b) A^2 c) A^3

23

$A = \{u\}$ et $B = \{u;v\}$

Écrire en extension : a) $A \times B$ b) $A \times A$

24

Card A = 5, Card B = 4 et Card $(A \cap B)$ = 2. Que vaut alors Card $(A \cup B)$?

25

Card A = 3 et Card B = 10. De plus $A \subset B$. Que vaut alors Card $(B \setminus A)$?

26

Card A = 3 et Card B = 100. Que vaut alors Card $(A \times B)$?

27

Card A = 10. Que vaut alors Card $\mathcal{P}(A)$?

28

Soient A et B deux ensembles finis. Exprimer *en fonction de* Card A, de Card B et éventuellement de Card $(A \cap B)$. Autrement dit, écrire une formule exprimant le nombre souhaité, mais ne faisant figurer rien d'autre que Card A, Card B, Card $(A \cap B)$ et pourquoi pas des constantes.

a) Card $(A \cup B)$

b) Lorsque $A \subset B$: Card $(B \setminus A)$

c) Card $(A \times B)$

29

Soit A un ensemble fini et n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de Card (A) et éventuellement de n :

a) Card (A^2)

b) Card (A^5)

c) Card (A^n)

d) Card $\mathcal{P}(A)$

IV- Les ensembles de nombres

1- Les grandes catégories de nombres

30

Cocher les cases pour répondre.

$\in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
0,2					
-1					
1,34cm					
3,14					
π					
$\frac{1}{8}$					
$\frac{1}{7}$					
$0{,}444\overline{4}\ldots$					
$0{,}999\overline{9}\ldots$					

31

$\in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{2}$					
$\sqrt{4}$					
1 cm					
$\frac{2}{6}$					
$\frac{3}{6}$					

32

On pose : $A = 0{,}1818\underline{18}...$

Démontrer que $A \in \mathbb{Q}$ en l'écrivant sous forme de fraction.

(Aide : donner l'écriture décimale de $100A$, puis de $100A - 1A$)

33

On pose : $B = 0{,}003\underline{003}...$

En vous inspirant de la méthode de l'exercice précédent, démontrer que $B \in \mathbb{Q}$.

2- L'irrationalité

34 (Hors Programme)

Démontrer que :

a) La somme de deux rationnels est un rationnel

b) Le double d'un irrationnel est un irrationnel

c) Le carré d'un irrationnel peut être rationnel

d) La racine d'un irrationnel est irrationnelle.

e) La somme de deux irrationnels est parfois irrationnelle et parfois rationnelle.

35

Sachant que $\sqrt{2}$ est un irrationnel, démontrer que $3\sqrt{2}+1$ est irrationnel.

3- Les intervalles

36

Vrai ou faux ?

a) $2 \in]1;3[$

b) $2 \in \{1;3\}$

c) $1{,}001 \in]1;3[$

d) $0{,}999 \in]1;3[$

e) $\pi \in]3{,}1\ ;\ 3{,}2[$

f) $1 \in]1;3[$

g) $1 \in [1;3]$

h) $0 \in [-2;-1] \cup [1;2]$

37

Écrire plus simplement :

a) $]-\infty;1] \cup [0;+\infty[$

b) $]-\infty;1] \cap [0;+\infty[$

c) $]-1;0] \cup]0;3]$

d) $]-1;0] \cap]0;3]$

e) $]-2;-1[\cup]-1;0[\cup [0;+1[$

38

Écrire sous la forme d'une réunion d'intervalles :

a) $\mathbb{R}^*$

b) $\mathbb{R} \setminus [-1;+1]$

c) $\mathbb{R} \setminus \{-1;+1\}$

39

Ecrire sous la forme d'une réunion d'intervalles :

a) $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

b) $]0;4[\setminus [1;2]$

40

Écrire plus simplement :

a) $[1;3] \cup [2;4]$

b) $[1;3] \cap [2;4]$

V- Exercices supplémentaires

41

On a : $E = \{a;b\}$ et $F = \{a\}$. Écrire en extension :

a) $E \cup F$

b) $E \cap F$

c) $E \cup E$

d) $E \cap E$

e) $E \setminus E$

f) $E \setminus (E \setminus F)$

g) $E \times F$

h) $F \times E$

i) $F \times F$

j) $\mathscr{P}(F)$

42

Écrire comme intervalle ou réunion d'intervalles, de la façon la plus simple :

a) $[-2;2] \setminus \{-2;2\}$

b) $[-2;2] \setminus \{0;2\}$

c) $[1;3] \setminus \{1;2\}$

d) $[-2;2] \cap]-2;2[$

e) $]-\infty;1] \cap [-1;+\infty[$

f) $[-3;3] \setminus ([-2;2] \cup [-1;1[)$

g) $[-3;3] \setminus ([-2;2] \cap [-1;1[)$

h) $[-1;1] \cap (\varnothing \cup [0;2])$

i) $[-1;1] \cap (\varnothing \cap [0;2])$

j) $\mathbb{R} \setminus (\{-1\} \cup [1;+\infty[)$

43

Que vaut l'expression ?

a) $Card([1;2] \setminus]1;2[)$

b) $Card(\{1;2;3\} \times \{1;2\})$

c) $Card\left(\{1;2;3\}^2 \setminus (\{1\} \times \{1;2;3\})\right)$

44

L'affirmation est-elle vraie ou fausse ?

a) $\varnothing \subset \{-1;2\}$

b) $\varnothing \in \{-1;2\}$

c) $0 \in \{-1;2\}$

d) $0 \in [-1;2]$

e) $0 \subset [-1;2]$

f) $\{0\} \subset [-1;2]$

g) $\{-1;2\} \in [-1;2]$

h) $\{-1;2\} \subset [-1;2]$

i) $\{-1;2\} \subset]-1;2[$

j) $[-1;2] \subset]-1;2[$

k) $]-1;2[\subset [-1;2]$

l) $]-1;2[\subset]-1;2[$

45

Donner un élément de :

a) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$

d) $]1;2[\times]1;2[$

e) $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$

46

Écrire en extension :

a) $\mathscr{P}(\varnothing)$

b) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$

c) $\mathscr{P}\left(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))\right)$

VI- Approfondissements

Les exercices qui suivent demandent une vraie réflexion, qui peut parfois durer plusieurs jours. Ils requièrent d'avoir lu la version longue du cours. Ne regarder pas la réponse trop tôt.

47

L'affirmation est-elle vraie ou fausse ?

a) $\{\varnothing\} \in \{-1;2\}$

b) $\{\varnothing\} \subset \{-1;2\}$

c) $\varnothing \in \varnothing$

d) $\varnothing \subset \varnothing$

e) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

f) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

48

Trouver une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$.

49

Trouver une bijection entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des entiers naturels pairs.

50

Considérons dans le plan deux segments de taille différente. Ces segments sont des ensembles de points. Établir par une construction géométrique une bijection entre ces deux segments. Soit un point quelconque appartenant premier segment, il s'agit de dire comment construire son image sur le second. On peut placer les deux segments comme on veut.

51

Peut-on établir une bijection entre un segment et une droite ? (On considèrera un segment ouvert, c'est-à-dire privé de ses extrémités.)

52

Peut-on établir une bijection entre un segment et un carré ? Il s'agit d'un carré « plein », d'une surface. La question, formulée d'une façon plus générale, est de savoir si l'on peut mettre en bijection une ligne avec une surface. Réfléchissez le temps qu'il faut et regardez ensuite la partie « conseils et réponses » où une aide vous est proposée.

53

Exercice de méditation. Voici quelques problèmes fondamentaux qui ont occupés Cantor. Même si vous êtes appelés à devenir un grand mathématicien, je doute que vous répondiez seul à ces questions (ce qui ne vous empêche pas d'y réfléchir quand même). Théoriquement, vous pourriez répondre aux deux premières, car les démonstrations ne requièrent aucune notion que vous ne connaissiez. Elles ne sont pas très longues non plus, mais requièrent du génie. Hilbert a dit des concepts crées par Cantor qu'ils étaient « le produit le plus étonnant de la pensée mathématique, et une des plus belles réalisations de l'activité humaine dans le domaine de l'intelligence pure ». À la dernière question, Cantor lui-même n'a pas su répondre (aujourd'hui, ce problème est, disons, réglé).

a) Comment démontrer qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$?

b) On dit qu'il y a une *injection* d'un ensemble E dans un ensemble F lorsqu'on peut mettre E en bijection avec une partie de F. Intuitivement, cela veut dire que F est « au moins aussi grand » que E. Démontrer que, s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre E et F.

c) Combien y a-t-il de cardinaux infinis ? Une infinité ? Laquelle ?

d) Y a-t-il un infini entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$?